Lesbrief

EERSTE AFGELEIDE

extreme waarden
raaklijn
normaal

TWEEDE AFGELEIDE

buigpunten

6/7N5p

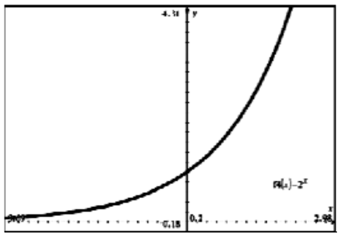
GGHM2013

Inleiding
Met behulp van de grafische rekenmachine kun je snel 'zien' of de grafiek daalt of stijgt. Het horizontaal lopen van een (deel van) de grafiek is niet altijd nauwkeurig te bepalen.
Bedenk wel dat je met de grafische rekenmachine altijd maar een deel van de grafiek ziet!
Je kunt eigenlijk nooit met zekerheid iets zeggen over het hele domein van de functie!!
Bovendien kun je niet precies bepalen waar de grafiek overgaat van stijgen naar dalen, met name daar waar de rekenmachine extreme waarden moet benaderen. (B.v. 1,73 of $\sqrt{3}$)
Bovendien lukt het niet altijd om met de rekenmachine de exacte x-waarde te bepalen van een extreme waarde.

Stijgen en dalen

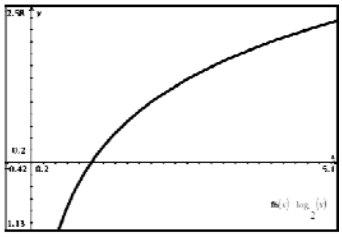
Bij het bekijken van het verloop van een grafiek van een functie is het van belang te weten hoe de grafiek verloopt. De grafiek kan stijgen, dalen en horizontaal lopen. Verder kun je ook nog bekijken hoe een grafiek daalt op stijgt.
We kijken nu eerst even naar alle mogelijkheden met betrekking tot het stijgen, dalen en horizontaal lopen van een grafiek. We onderscheiden de volgende mogelijkheden:

Stijgen
Een grafiek kan steeds meer stijgen, we spreken van een toenemende stijging. Bij gelijkblijvende horizontale verplaatsing neemt de functiewaarde steeds toe maar de **toename** is steeds **groter**.



toenemende stijging

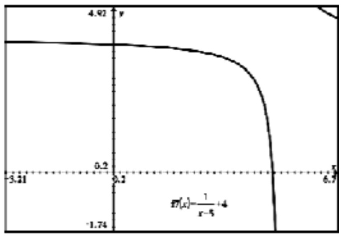
Een grafiek kan ook afnemend stijgen, dit noemen we een afnemende stijging. Bij gelijkblijvende horizontale verplaatsing neemt de functiewaarde wel steeds toe maar de **toename** is steeds **kleiner**.



afnemende stijging

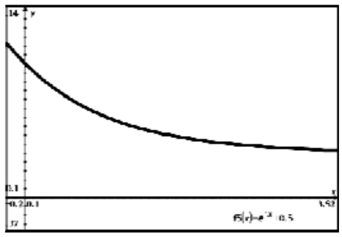
Dalen

Bij het dalen van een grafiek spreken we van een toenemende daling als de grafiek wel steeds daalt en de **afname** (daling) steeds **groter** wordt.



toenemende daling

We spreken van een afnemende daling als de grafiek wel steeds afneemt en de **afname** (daling) steeds **kleiner** wordt.



afnemende daling

Horizontaal

Als de grafiek niet toeneemt en ook niet afneemt loopt de grafiek horizontaal.

Eerste afgeleide

Helling

De eerste afgeleide beschrijft de helling van de grafiek in elk punt van de grafiek. Als je wilt weten wat de helling van de grafiek van $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$ is bij x = 2 dan bepaal je eerst de eerste afgeleide functie $f\,'(x) = 4x - 3$ en vervolgens bereken je de functiewaarde van de afgeleide functie *f'*: $f\,'(2) = 4 \cdot 2 - 3 = 5$
De grafiek van f(x) heeft dus helling 5 bij x = 2.

Extremen en tekenoverzicht

Met de afgeleide functie kunnen we dus de helling van de grafiek bepalen. Zodoende kunnen we zien waar f(x) stijgt dan wel daalt. Als een grafiek van een functie eerst stijgt en daarna daalt dan moet daartussen ergens een (lokaal) maximum zitten. In dit maximum is de helling van de grafiek gelijk aan nul. Analoog geld dat als de grafiek eerst daalt en daarna stijgt er een (lokaal) minimum moet zijn.
Hiervan maken we gebruik bij het maken van een tekenschema of tekenoverzicht:

- bepaal de afgeleide functie,
- bereken de nulpunten van de afgeleide,
- maak een tekenoverzicht van de afgeleide functie en het functie-verloop,
- bepaal de aard van de extremen en hun waarde(n).

Voorbeeld:

Gegeven is $f(x) = \dfrac{20x^2 + 80}{x}$

- **afgeleide bepalen:**

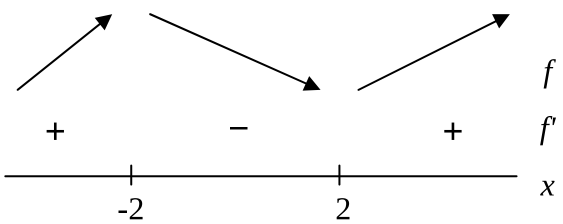
$$f\,'(x) = \frac{x \cdot 40x - (20x^2 + 80) \cdot 1}{x^2} = \frac{40x^2 - 20x^2 - 80}{x^2} = \frac{20x^2 - 80}{x^2}$$

- **nulpunten van de afgeleide berekenen:**

$$f\,'(x) = 0 \qquad \text{dus} \qquad \frac{20x^2 - 80}{x^2} = 0 \qquad \text{en} \qquad 20x^2 - 80 = 0$$

$$20x^2 = 80 \qquad x^2 = 4 \qquad \text{zodat} \qquad x = 2 \;\vee\; x = -2$$

- **tekenoverzicht maken:**



- **aard en waarde bepalen van de extremen:**

$$f(-2) = \frac{20 \cdot (-2)^2 + 80}{-2} = \frac{80 + 80}{-2} = -80 \;\text{ en }\; f(2) = \frac{20 \cdot (2)^2 + 80}{2} = \frac{80 + 80}{2} = 80$$

Dus er is een **maximum** 80 bij *x* = 2 en een **minimum** –80 bij *x* = –2

Raaklijn
Voor het opstellen van de vergelijking van de raaklijn gebruiken we ook de eerste afgeleide.

De raaklijn heeft immers dezelfde richting als de grafiek in het raakpunt!
Dat is ook meteen de werkwijze:
- bepaal de afgeleide functie,
- bereken de helling (richtingscoëfficiënt) in het raakpunt,
- vul de voorlopige vergelijking van de raaklijn in en
- met behulp van de coördinaten van het raakpunt de vergelijking opstellen.

Voorbeeld:

$f(x) = xe^x$ bepaal de vergelijking van de raaklijn bij $x = 2$

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$

$f'(2) = 3e^2$

dus de (voorlopige) vergelijking van de raaklijn is: $y = 3e^2 \cdot x + b$

verder is $f(2) = 2e^2$ en daarmee het raakpunt $(2, 2e^2)$

zodat: $2e^2 = 3e^2 \cdot 2 + b$

en $b = -4e^2$

de vergelijking van de raaklijn wordt daarmee: $y = 3e^2 \cdot x - 4e^2$

Normaal(lijn)
De normaal is de lijn die de grafiek in een punt snijdt én loodrecht op de grafiek staat.
De werkwijze om de vergelijking van de normaal te bepalen is gelijk aan die voor de raaklijn, echter in plaats van de richting van de grafiek nemen we de richting hier loodrecht op.
Als de richting van de raaklijn *a* is, dan is de richtingscoëfficiënt van de normaal gelijk aan $\frac{-1}{a}$

Voorbeeld:

$f(x) = xe^x$ bepaal de vergelijking van de normaal bij $x = 2$

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$

$f'(2) = 3e^2$

dus de (voorlopige) vergelijking van de normaal is: $y = \frac{-1}{3e^2} \cdot x + b$

verder is $f(2) = 2e^2$ en daarmee het snijpunt $(2, 2e^2)$

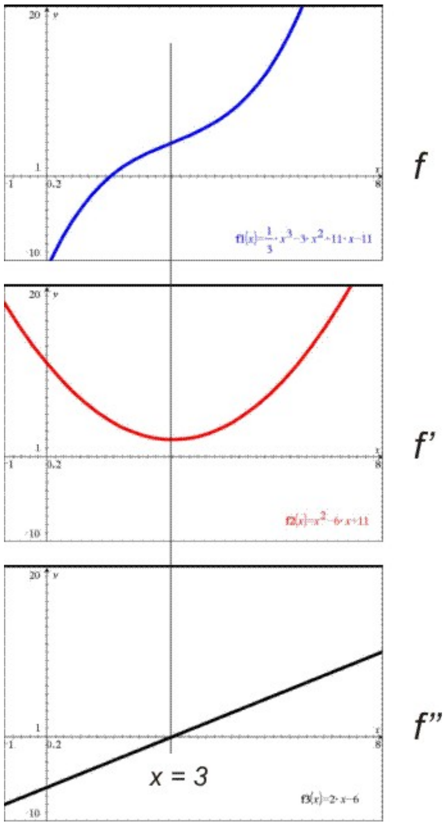
zodat: $2e^2 = \frac{-1}{3e^2} \cdot 2 + b$

en $b = 2e^2 + \frac{2}{3e^2}$

de vergelijking van de normaal-lijn wordt daarmee: $y = \frac{1}{3e^2} \cdot x + 2e^2 + \frac{2}{3e^2}$

Tweede afgeleide

Buigpunten
De tweede afgeleide beschrijft de helling van de afgeleide.
Met andere woorden; als de eerste afgeleide een extreme waarde heeft, dan heeft de tweede afgeleide een nulpunt. Dat is dus als de toename (of afname) van de functie een maximum of minimum heeft. Dit zijn de punten op de grafiek waar bijvoorbeeld een afnemende stijging overgaat in een toenemende stijging (of omgekeerd). Zie de afbeelding hiernaast.
Deze punten noemen we 'buigpunten'.



Let op:
Er is alleen een buigpunt als de tweede afgeleide van teken wisselt!

Men zegt:
- als *f''* > 0 dan is de grafiek ***hol*** (naar boven)
- en als *f''* < 0 dan is de grafiek ***bol*** (naar boven).

Voorbeeld:

$$f(x) = \sin(2x) + x^2 \quad \text{met} \quad D_f = \langle 0, \pi \rangle$$
$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2x$$
$$f''(x) = -4\sin(2x) + 2$$
$$f''(x) = 0 \text{ geeft } \sin(2x) = \tfrac{1}{2}$$

dus $2x = \tfrac{1}{6}\pi$ en $x = \tfrac{1}{12}\pi$

of $2x = \tfrac{5}{6}\pi$ en $x = \tfrac{5}{12}\pi$

Tekenschema van *f''*:

Kies een paar 'makkelijke' waarden voor *x*:

$$f''(0) = 2$$
$$f''(\tfrac{3}{12}\pi) = -2$$
$$f''(\tfrac{6}{12}\pi) = 2$$

tekenschema:

+ + + + +		– – – – –		+ + + +	*f''*
	$x = \tfrac{1}{12}\pi$		$x = \tfrac{5}{12}\pi$		*x*

De grafiek heeft op het gegeven domein dus buigpunten bij $x = \tfrac{1}{12}\pi$ en $x = \tfrac{5}{12}\pi$.

Oefeningen

1 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 1$

a Bepaal de extreme waarden en hun aard.

b Ga na of er één of meerdere buigpunten zijn en bepaal hun coördinaten.

2 Gegeven is $g(x) = xe^x$

Bereken de coördinaten van het buigpunt.

3 Gegeven is $f(x) = 3x + \ln(x)$

Toon aan dat *f* strikt stijgend is.

4 Gegeven is $f(x) = x^2 - 3x + 4$

a Stel de vergelijking op van de raaklijn in het punt *A* met $x_A = -1$

b Geef ook de vergelijking van de normaal in *A*.

5 Gegeven is $f(x) = \dfrac{-2x-6}{x+2}$

Geef de vergelijking van de raaklijn daar waar de grafiek de *X*-as snijdt.

6 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 2)$

a Toon aan dat de grafiek de horizontale as snijdt bij –2 en +2.

b Bereken de coördinaten van de extreme waarden van deze functie.

c Stel de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in het punt met $x = 2$.

7 Gegeven is $f(x) = \ln(5 - 2x)$ en de lijn *l*: $y = -2x + 7$

Bereken de coördinaten van het punt *A* op de grafiek van *f* waar de raaklijn evenwijdig is aan *l*.

Uitwerkingen

Opg.1

a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 1$

$f'(x) = x^2 - 8x + 12$ $\quad f'(x) = 0$

$\rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x-6) = 0$

$x = 2 \vee x = 6$

tekenoverzicht:

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad f$

$+++ \quad ------ \quad +++ \quad f'$

$2 \qquad 6 \qquad x$

$f'(0) = 12 > 0$

$f'(3) = -3 < 0$

$f'(10) = 32 > 0$

$f(2) = 2\frac{2}{3} - 16 + 24 + 1 = 11\frac{2}{3}$

$f(6) = \frac{1}{3} \cdot 216 - 4 \cdot 36 + 12 \cdot 6 + 1 = 1$

$f(x)$ heeft max $11\frac{2}{3}$ bij $x=2$ en minimum 1 bij $x=6$

b $f''(x) = 2x - 8$ $\quad f''(x) = 0 \rightarrow 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$

tekenoverz. f''

$---- \quad ++++$

4

$f''(0) = -8 < 0$

$f''(5) = 2 > 0$

Er is een buigpunt bij $x=4$.

Opg.2

$g(x) = xe^x$ $\quad g'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$

$g''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$

$g''(x) = 0 \rightarrow e^x(x+2) = 0 \rightarrow x+2 = 0 \rightarrow x = -2$

tekenoverzicht f'':

$---- \quad ++++$

-2

$g''(0) = 2 > 0$

$g''(-3) = -e^{-3} < 0$

Er is een buigpunt bij $x = -2$

en $y = -2e^{-2} = \frac{-2}{e^2}$

dus coörd.: $\left(-2, \frac{-2}{e^2}\right)$

Opg.3

$f(x) = 3x + \ln(x)$ $\qquad f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$

$f(x) = 0 \rightarrow 3 + \frac{1}{x} = 0$

$\rightarrow \frac{1}{x} = -3 \rightarrow -3x = 1$

$x = -\frac{1}{3}$.

Maar $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ (vanwege $\ln(x)$)

dus is er géén nulpunt van $f'(x)$ op het domein.

Voor $x > 0$ is $f'(x) > 0$ dus $f(x)$ is stijgend op het domein.

Opg.4

$f'(x) = 2x - 3$ en $f'(-1) = 2 \cdot -1 - 3 = -5$

Dus raaklijn: $y = -5x + b$

$f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot -1 + 4 = 8$ dus coördinaten van A zijn (–1 , 8)

Raaklijn gaat door A: $8 = -5 \cdot -1 + b$ dus $b = 3$

En de vergelijking van de raaklijn in A(–1 , 8) is $y = -5x + 3$

De normaallijn heeft als voorlopige vergelijking: $y = \frac{1}{5}x + b$

Gaat door (–1 , 8) : $8 = \frac{1}{5} \cdot -1 + b$ dus $b = 8\frac{1}{5}$

De vergelijking is dus: $y = \frac{1}{5}x + 8\frac{1}{5}$

Opg.5

$f(x) = \frac{-2x-6}{x+2}$ $\qquad f'(x) = \frac{(x+2) - (-2x-6) \cdot 1}{(x+2)^2}$

$f(x) = 0 \rightarrow -2x - 6 = 0$

$x = -3$ dus raakpunt $(-3, 0)$

$f'(-3) = \frac{+2}{(-3+2)^2} = 2$ $\qquad$ raaklyn : $y = 2x + b$

door $(-3,0)$: $0 = 2 \cdot -3 + b \rightarrow b = 6$

dus raaklyn : $y = 2x + 6$

Opg.6

Voor snijpunten met horizontale as (= *X*-as) $f(x)=0$ oplossen:

$(x^2-4)\cdot(x^2+2)=0$

$x^2-4=0$ of $x^2+2=0$

$x^2=4$ $\quad$ $x^2=-2$

$x=2$ of $x=-2$ $\quad$ geen opl.

$f'(x)=2x\cdot(x^2+2)+(x^2-4)\cdot 2x=2x^3+4x+2x^3-8x=4x^3-4x$

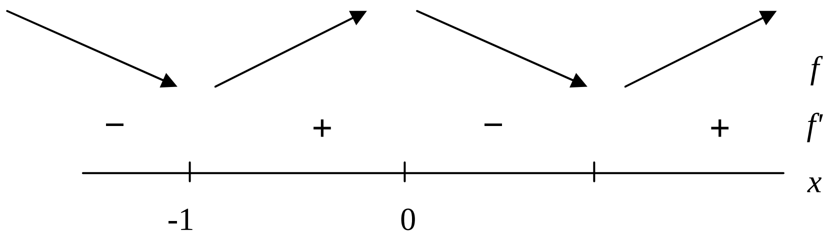
$f'(x)=0$ dus $4x^3-4x=0$

$4x\cdot(x^2-1)=0$

$4x=0$ of $x^2-4=0$

dus $x=0$, $x=1$ of $x=-1$

tekenoverzicht:



1

$f(-1)=-9$ $\quad f(0)=-8$ $\quad f(1)=-9$

Er is een minimum –9 bij x = –1, een maximum –8 bij x = 0 en een minimum –9 bij x = –1

coördinaten: *B*(2 , 0) zie a).

$f'(2)=4\cdot 2^3-4\cdot 2=24$

raakl: $y=24x+b$

door (2 , 0): $0=24\cdot 2+b$ dus $b=-48$

en de raaklijn: $y=24x-48$

De afgeleide functie: $f'(x)=x^2-7x+12$

$f'(x)=0$ voor x = 3 en x = 4 $\quad$ (ga dit na!)

Opg. 7

$f(x) = \ln(5-2x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{5-2x} \cdot -2 = \frac{-2}{5-2x}$

$f'(x) = -2$ want evenwydig aan $y = -2x+7$

$\rightarrow \frac{-2}{5-2x} = -2 \rightarrow 5-2x = 1$ $\quad -2x = -4$

$x = 2$.

$f(2) = \ln(5-4) = \ln(1) = 0 \rightarrow A\ (2,0)$.